Relações

Uma relação binária ou simplesmente uma relação R de um conjunto A em um conjunto B associa a cada par (a, b) em $A \times B$ uma das suas seguintes afirmações

1. a está relacionado com b
2. a não está relacionado com b

Eis alguns exemplos: Um casamento é uma relação do conjunto H de homens com o conjunto M de mulheres. Dado um elemento $h \in H$ e outro $m \in M$, ou h é casado com m ou h não é casado com m. Coplanaridade é uma relação sobre o conjunto de retas do espaço. Dadas duas retas a e b no espaço, ou a é coplanar com b ou não é.

Qualquer relação R de um conjunto A em um conjunto B define, de modo único, um subconjunto $R*$ de $A \times B$ como:

$$R* = \{(a, b)/a \ esta \ relacionado \ com \ b\}$$

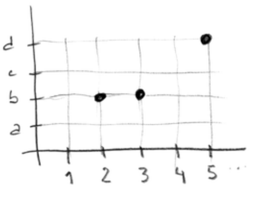
$$= \{(a, b)/aRb\}$$

Uma relação R de A em B, que é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, pode ser representada na forma de um sistema de eixos, onde na horizontal estão os pontos de A e na vertical os de B. No cruzamento de ambos marca-se os pontos que pertencem à relação.

Por exemplo: Seja R a a relação de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{a, b, c, d\}$ definida por

$$R = \{(2, b), (3, b), (5, d)\}$$

Então, 1 ~~R~~ a, 1 ~~R~~ b, 1 ~~R~~ c, 1 ~~R~~ d, 2 ~~R~~ a, 2 R b, 2 ~~R~~ c, 2 ~~R~~ d, 3 ~~R~~ a, 3 R b, 3 ~~R~~ c, 3 ~~R~~ d, 4 ~~R~~ a, 4 ~~R~~ b, 4 ~~R~~ c, 4 ~~R~~ d, 5 ~~R~~ a, 5 ~~R~~ b, 5 ~~R~~ c, 5 R d. A relação está exibida no diagrama de coordenadas $A \times B$ a seguir.



A relação idêntica sobre um conjunto A é o conjunto de todos os pares de A com coordenadas idênticas. Seu símbolo é $\triangle_A$.

$$\triangle_A = \{(a, a)/a \in A\}$$

A relação idêntica também é denominada *diagonal* em virtude de sua posição no diagrama de coordenadas de $A \times A$.

Relação Inversa

Seja R uma relação de A em B. A *inversa* de R, indicada por R^{-1} é a relação de B em A, que consiste nos pares ordenados que quando invertidos pertencem a R.

$$R^{-1} = \{(b, a)/(a, b) \in R\}$$

Por exemplo, a inversa da relação *x é marido de y* é *y é mulher de x* e a inversa de *x é mais baixo que y* é *y é mais alto que x*.

Relações de equivalência

Reflexiva Uma relação R sobre um conjunto A é dita reflexiva se aRa, isto é $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. Por exemplo, seja R a relação de semelhança sobre o conjunto de triângulos do plano. R é reflexiva, já que todo triângulo é semelhante a ele mesmo. Seja R a relação $\geq$ sobre o conjunto de números reais. Ou seja, $(a, b) \in R$ se e somente se $a \geq b$. Logo R é simétrica. Se a relação for $>$, ela deixa de ser simétrica.

Simétrica Uma relação R é dita simétrica sempre que se aRb então bRa, isto é se $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$. Por exemplo seja R a relação de semelhança sobre o conjunto de triângulos do plano. R é simétrica, já que se um triângulo α é semelhante a um triângulo β, então β é semelhante a α. Outro exemplo: a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ não é simétrica uma vez que $(3, 4) \in R$, mas $(4, 3) \notin R$.

Transitiva Uma relação R sobre um conjunto A é dita transitiva se, sempre que aRb e bRc então aRc, isto é se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ implicar $(a, c) \in R$. Por exemplo, a semelhança de triângulos é transitiva, pois se o triângulo α é semelhante ao triângulo β e se β é semelhante a γ, então pode-se afirmar que α é semelhante a γ. Um contra-exemplo: a relação de perpendicularidade de retas no plano não é transitiva, pois se a reta a é perpendicular à reta b e a reta b é perpendicular à reta c isto não implica que a seja perpendicular à reta c.

Relação de Equivalência Uma relação R é dita *de equivalência* se R for reflexiva, simétrica e transitiva. Assim, a relação de semelhança de triângulos, estudada acima é uma relação de equivalência.

Partição

Uma partição de um conjunto X é uma subdivisão de X em subconjuntos que são disjuntos (isto é não compartilham elementos) e que quando reunidos reconstróem X. Dito de outra maneira, todo elemento $a \in X$ pertence a um e somente um dos subconjuntos formados pela partição. Os subconjuntos de uma partição denominam-se células. Em termos matemáticos, a coleção $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ de subconjuntos de A é uma partição de A se e somente se

1. $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ e
2. $\forall A_i, A_j$ ou $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \phi$

Por exemplo, considere $X = \{x/$ x é inteiro, $x < 10\}$. Indique quais classes de subconjuntos de X formam uma partição

1. $[\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 8\}]$
2. $[\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 7, 8\}]$
3. $[\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{6, 7, 8\}, \{9\}]$
4. $[\{1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{6, 7, 8\}, \{9\}]$
5. $[\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 7\}, \{9, 8\}]$

Apenas o último caso forma uma partição. O primeiro não tem o elemento 7 nem o 9, o segundo não tem o elemento 9, o terceiro repete o elemento 4 e o quarto não tem o elemento 5 além de repetir o 4.

Relação de equivalencia e partição

Seja R uma relação de equivalência sobre o conjunto A e para cada $a \in A$ seja [a] a classe de equivalência de a o conjunto dos elementos com os quais a está relacionado,

$$[a] = \{x/(a, x) \in A\}$$

A coleção de classes de equivalência de A, indicada por $A|R$ é denominada o quociente de A por R

$$A|R = \{[a]/a \in A\}$$

A propriedade fundamental do conjunto quociente está contida no teorema:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Então o conjunto quociente $A|R$ é uma partição de A. Ou seja:

1. $a \in [a], \forall a \in A$
2. $[a] = [b]$ se e somente se $(a, b) \in R$
3. Se $[a] \neq [b]$ então $[a]$ e $[b]$ são disjuntas

Por exemplo, seja R_3 a relação sobre $\mathbb{Z}$ (o conjunto dos inteiros), definida por $x = y(mod\ 3)$ que se lê "x é congruente a y módulo 3" que significa que a diferença $x - y$ é divisível por 3. Então R_3 é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$. Existem exatamente 3 classes de equivalência distintas em $\mathbb{Z}|\mathbb{R}_5$:

A_0 ={...,-6, -3, 0, 3, 6, ...}

A_1 ={...,-5, -2, 1, 4, 7, ...}

A_2 ={...,-4, -1, 2, 5, 8, ...}

Observe-se que cada inteiro x pode ser expresso de modo único na forma $x = 3q + r$ onde $0 \leq r < 3$é um elemento da classe de equivalência A_r onde r é o resto. Note-se que as classes de equivalência são disjuntas duas a duas e que

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$$

☞ Para você fazer

1. Seja R a relação x é maior do que y e sejam os conjuntos $A = \{3, 4, 6, 11, 12, 13, 18, 20\}$ e $B = \{2, 4, 5, 7, 13, 16, 17, 18\}$ e
   (a) Escreva NO VERSO, R como um conjunto de pares ordenados,
   (b) Represente graficamente R num diagrama de coordenadas $A \times B$
   (c) Ache a relação inversa R^{-1}

   Responda no local correto quantos pares existem em R e em R^{-1}

2. Seja R a relação x é menor do que y e seja o conjunto $A = \{7, 7, 7, 7\}$. Determine se R é:
   (a) reflexiva
   (b) simétrica
   (c) transitiva

   Responda no local correto 1 para SIM e 0 para NÃO

3. Sejam os conjuntos A e X_i abaixo definidos. Verifique os elementos pertinentes a cada (sub) conjunto e informe 1 se X_i constitui uma partição de A. Responda 0 se X_i não for partição de A.

   A={35,36,30,39,11,17,14,25,28,7,16,4,23, 19,5,12,38,15,20,29,22,13,24,6}.

   X1={36,39,14,7,23,12,38,6}

   X2={11,17,25,4,5,15,20,22}

   X3={30,28,16,19,29,13,24}

4. Sejam os conjuntos A e X_i abaixo definidos. Verifique os elementos pertinentes a cada (sub) conjunto e informe 1 se X_i constitui uma partição de A. Responda 0 se X_i não for partição de A.

   A={22,29,40,36,3,19,16,17,35,28,30,39,32, 7,34,15,31,24,33,25,2,20,1,18}.

   X1={29,16,30,39,7,15,18}

   X2={40,35,28,34,24,20}

   X3={36,19,32}

   X4={17,31,25,1}

   X5={3,33,2}

Responda aqui:

1.a	1.c	2.1	2.2	2.3	3	4

Para saber mais:

- GERSTING, Judith. **Fundamentos matemáticos para a CC**. item 4.1.
- LIPSCHUTZ, Seymour. **Matemática Finita**. Cap. 7.