_____ / _____ / _____

Notação fatorial

O produto dos n inteiros positivos de 1 a n é indicado por $n!$ que é lido como fatorial de n

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1) \times n$$

A mesma função pode ser definida por recorrência

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \end{cases}$$

Por coenvieniência, define-se $0! = 1$ Eis uma tabela com os fatoriais dos primeiros inteiros. Note-se como esta sequencia cresce rápido

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720
n	7	8	9	10	11	12	
$n!$	5040	40320	362880	3628800	39916800	479001600	

Coeficientes Binomiais

O símbolo $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ que é lido como $n\ C\ r$ onde r e n são inteiros positivos com $r \leq n$ é definido como segue

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)}{1 \times 2 \times 3... \times (r-1) \times r}$$

Estes números são denominados coeficientes binomiais. Alguns exemplos $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$; $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 126$;
$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 792$; $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{13}{1} = 13$

Note-se que em $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ há exatamente r fatores no numerador e r fatores no denominador.

Regra para economizar

$\begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ ou dito de outra maneira se $a + b = n$ então $\begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix}$

veja-se por exemplo para calcular $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ é necessário achar $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, mas como se sabe $10 - 7 = 3$ e portanto pode-se calcular $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ que terá o mesmo resultado. Daí $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$.

Generalizando a fórmula dos coeficientes binomiais e sabendo que $0! = 1$ tem-se $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{0!}{0!0!} = 1$.

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 +$$

$$... + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

perceba-se entretanto que as frações na frente dos termos são os coeficientes binomiais e fica

$$(a+b)^n = a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} a^{n-3}b^3 +$$

$$... + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^2 b^{n-2} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + b^n$$

e escrevendo de maneira reduzida

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} a^{n-r} b^r$$

Propriedades de $(a+b)^n$:

1. Existem $n + 1$ termos
2. A soma dos expoentes de a e de b em cada termo é n
3. Os expoentes de a decrescem termo a termo de n a 0. Os expoentes de b crescem termo a termo de 0 a n.
4. O coeficiente de qualquer termo é $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ onde k é o expoente de a ou o expoente de b
5. Os coeficientes dos termos equidistantes das extremidades são iguais

Seja por exemplo desenvolver $(2x + 3y^2)^5$. Observe-se que neste caso o a do teorema binomial corresponde a $2x$ e o b a $3y^2$. Daí

$(2x + 3y^2)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(3y^2) + \frac{5.4}{1.2}(2x)^3(3y^2)^2 + \frac{5.4}{1.2}(2x)^2(3y^2)^3 + 5(2x)(3y^2)^4 + (3y^2)^5 =$

$(2x + 3y^2)^5 = 2^5x^5 + 5.2^4x^4.3y^2 + 10.2^3x^3.3^2y^4 + 10.2^2x^2.3^3y^6 + 5.2x.3^4y^8 + 3^5y^{10} =$

$(2x + 3y^2)^5 = 32x^5 + 240x^4.y^2 + 720x^3y^4 + 1080x^2.y^6 + 810x.y^8 243y^{10} =$

Triângulo de Pascal

Os coeficientes das potências sucessivas de $a + b$ podem ser colocados em uma tabela triangular de números denominada triângulo de Pascal, como se vê

$$\begin{array}{rc} (a+b)^0 = 1 & 1 \\ (a+b)^1 = a + b & 1 \quad 1 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

O triângulo de Pascal possui as seguintes propriedades:

1. O primeiro e o último números de cada linha é 1.
2. Qualquer outro número pode ser obtido somando os 2 números que estão acima dele
3. Cada número é um coeficiente binomial

Pode-se escrever o triângulo usando coeficientes binomiais, a saber:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

No triângulo, vale a seguinte propriedade:

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$$

☞ Para você fazer

1. Ache o coeficiente binomial $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. Ache o coeficiente binomial (use a regra acima para economizar trabalho) $\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$
3. Desenvolva o triângulo de Pascal até a linha 11 e informe qual o quarto elemento dessa linha. (Ela começa com 1 10).
4. Desenvolva $(4x^5 + 3y^5)^9$ e informe qual o sexto termo da série
5. Desenvolva $(2x^2 + 4y^2)^{10}$ e informe qual o coeficiente do termo que tem x^6 e y^{14}
6. Desenvolva $(3x^3 + y^3)^5$ e informe qual o coeficiente do termo que tem x^0 e y^{15}

Responda aqui:

1.	2.	3.	4.coeficiente
4.expoente x	4.expoente y	5.coeficiente	6.coeficiente