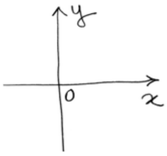
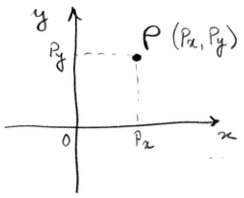
U Positivo - UTFPR - PUCPr – 11/02/2019 - 12:36:35.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Aquecimento em geometria analítica VIVOt70a, V: 1.09 1
- 1 _____ / _____ / _____

Aquecimento em geometria analítica

Considerem-se 2 eixos x e y perpendiculares no ponto O. Ambos determinam o plano α.



Dado um ponto qualquer $P \in \alpha$ conduza-se por ele, a duas retas, ambas paralelas aos eixos originalmente desenhados. Tais retas determinam dois outros pontos, a quem se chamará P_x a intersecção da reta vertical com o eixo x e P_y a intersecção da reta horizontal com o eixo y. Eis como ficará esta construção



Nessas condições, define-se

eixo das abcissas é o eixo horizontal ou eixo x.

eixo das ordenadas é o eixo vertical ou eixo y.

origem do sistema é o ponto O.

plano cartesiano é o plano α.

sistema de eixos cartesiano é o sistema xOy.

abcissa do ponto P é o número real P_x.

ordenada do ponto P é o número real P_y.

coordenadas de P é o par ordenado (P_x, P_y) em que sempre P_x é o primeiro termo.

Segue-se um teorema que afirma que entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca. Note-se que a ordem dentro do par é importante, assim em geral, $(a, b) \neq (b, a)$. A principal consequência deste teorema é que em geometria analítica plana:

1. dar um ponto P significa dar o par ordenado (x_p, y_p).

2. pedir um ponto P significa pedir o par de coordenadas (x_p, y_p).

3. todo ponto P procurado representa duas incógnitas x_p e y_p.

Quadrantes

Os eixos X e Y dividem o plano cartesiano em 4 regiões chamadas quadrantes que são numerados no sentido anti-horário começando às 1h30 horas. Tem-se então:

primeiro quadrante corresponde à 1h30 e tem $x_p \geq 0$ e $y_p \geq 0$.

segundo quadrante corresponde à 10h30 e tem $x_p \leq 0$ e $y_p \geq 0$.

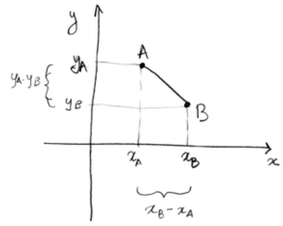
terceiro quadrante corresponde à 7h30 e tem $x_p \leq 0$ e $y_p \leq 0$.

quarto quadrante corresponde à 4h30 e tem $x_p \geq 0$ e $y_p \leq 0$.

Algumas observações: Um ponto pertence ao eixo das abcissas se tiver sua ordenada nula, ou seja tiver coordenadas $(a, 0)$. Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se tiver abcissa nula ou seja coordenadas $(0, b)$. Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se tiver coordenadas iguais ou seja (c, c). Finalmente, um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares se tiver coordenadas simétricas ou seja $(d, -d)$ ou $(-d, d)$.

Distância pitagórica entre dois pontos

Suponhamos dois pontos quaisquer A e B no plano cartesiano. Cada ponto é dados por suas coordenadas, assim $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. A distância entre esses dois pontos sempre pode ser obtida pelo Teorema de Pitágoras, como se pode ver em



$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Note que já que se extrai a raiz de algo elevado ao quadrado, perde importância o sinal original desse algo. Dessa maneira, tanto faz calcular $x_a - x_b$ como $x_b - x_a$. Da mesma maneira para $y_a - y_b$ como $y_b - y_a$.

Dados os pontos $A = (8, 11)$, $B = (-4, -5)$ e $C = (-6, 9)$, achar o ponto $P(x_p, y_p)$ que esteja equidistante de A, B e C.

Aplicando a fórmula da distância aos pontos A e B e igualando, fica $(x-8)^2+(y-11)^2 = (x+4)^2+(y+5)^2$. Desenvolvendo esta igualdade fica: $x^2-16x+64+y^2-22y+121 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 10y + 25$ ou $3x + 4y = 18$. Aplicando o mesmo princípio aos pontos B e C fica $(x+4)^2+(y+5)^2 = (x+6)^2+(y-9)^2$. Desenvolvendo $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 10y+25 = x^2+12x+36+y^2-18y+81$ e $-4x + 28y = 76$ Resolvendo o sistema de 2 equações e 2 incógnitas do primeiro grau, fica $P(2, 3)$.

Distância Manhattan entre 2 pontos

A distância pitagórica é uma linha reta entre os 2 pontos. Mas suponha que os dois pontos estão dados numa malha de ruas e avenidas como se fosse na ilha de Manhattan em Nova Iorque. Neste caso a distância pitagórica seria aquela usada pelo superhomem para ir de um ponto a outro. Seres humanos comuns não podem voar sobre os prédios e portanto para ir de um ponto a outro, precisam passar pelas ruas e avenidas. Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, a distância manhattan é dada por

$$d_m = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Ponto médio

Dado um segmento AB que conecta dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, o ponto médio do segmento AB tem coordenadas $x_m = \frac{x_a+x_b}{2}$ e $y_m = \frac{y_a+y_b}{2}$.

Condição de alinhamento de 3 pontos

Três pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ são colineares (ou seja pertencem os 3 a uma linha reta) se e somente se suas coordenadas verificam a igualdade

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) = (x_c - x_b)(y_b - y_a)$$

ou escrito de maneira mais amigável

$$\frac{(x_b - x_a)}{(x_c - x_b)} = \frac{(y_b - y_a)}{(y_c - y_b)}$$

Como já se conhece a teoria dos determinantes, esta condição de alinhamento pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determine y para que $A = (3, 5)$, $B = (-3, 8)$ e $C = (4, y)$ sejam colineares. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ e $4(5-8) - y(3+3) + (24+15) = 0$ e $y = 9/2$

☞ Para você fazer

1. Dados 5 pontos, cujas coordenadas são: $P_1 = \{-9, 6\}$,$P_2 = \{-7, 9\}$,$P_3 = \{3, -4\}$, $P_4 = \{2, 8\}$,$P_5 = \{10, 7\}$. Indique qual par de pontos estão mais próximos e qual par de pontos estão mais distantes.

2. Dados 2 pontos, cujas coordenadas são: $P_1 = \{3, 1\}$ e $P_2 = \{-7, 9\}$. Ache o retângulo em α cujas extremidades opostas estão dadas por P_1 e P_2. Ache a área desse polígono. Obs: as arestas são paralelas aos eixos cartesianos.

3. Dados 2 pontos, cujas coordenadas são: $P_1 = \{1, -1\}$ e $P_2 = \{5, 1\}$. Ache a distância Manhattan entre eles.

4. Suponha um polígono definido por seus 4 pontos: $A = \{-8, 0\}$, $B = \{-4, -2\}$, $C = \{-8, 10\}$ e $D = \{9, 6\}$, Ache a área do polígono em α formado por ABCD nessa ordem.

5. Suponha três pontos A, B e C cujas coordenadas são: $A = \{5, x\}$, $B = \{-8, 0\}$ e $C = \{-10, 0\}$ Ache a incógnita pedida para que os 3 pontos sejam colineares.

6. Suponha dois pontos A e B cujas coordenadas são: $A = \{-5, 8\}$ e $B = \{-5, 3\}$. Ache $P(x, y)$ para que P seja equidistante de A e de B.

7. Suponha o segmento M dado por $M_1 = \{-6, 4\}$ e $M_2 = \{4, 9\}$. Suponha o segmento N dado por $N_1 = \{8, 5\}$ e $N_2 = \{-2, -10\}$. Ache a distância entre os pontos médios de M e N.

1-prox.	1-dist.	2	3	4
5	6-x	6-y	7	xxx xxx xxx xxx