Matrizes

Uma matriz é uma tabela retangular de números. A forma geral de uma matriz com m linhas por n colunas é

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Indica-se tal matriz por $A_{ij} = (a_{ij})$ e denomina-se-a por matriz $m \times n$. Note que a linha é identificada pelo primeiro índice e a coluna pelo segundo. Seja por exemplo a matriz 2×4 formada por $\begin{pmatrix} 8 & 17 & -3 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Aqui as letras maiúsculas A, B, ... indicam matrizes, enquanto as letras minúsculas a, b, ... indicam números qualificados como *escalares* em oposição à matrizes. Duas matrizes A e B são iguais e escrevemos $A = B$ se são do mesmo tipo (isto é têm o mesmo número de linhas e de colunas) e se os elementos correspondentes são também iguais. Logo a igualdade de duas matrizes $m \times n$ equivale a um sistema de mn igualdades, uma para cada par de elementos.

Por exemplo, a afirmação $\begin{pmatrix} a+b & 2a+2b \\ a-b & 2a-5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ equivale ao sistema de equações
$a + b = 3$
$a2 + 2b = 2$
$a - b = 5$
$2a - 5b = -7$

Uma matriz com uma única linha é um *vetor linha* e uma matriz com uma única coluna é um *vetor coluna*. Ambos são *vetores*. Logo, um vetor é um caso particular de uma matriz.

Adição de matrizes

Sejam A e B matrizes do mesmo tipo, isto é com o mesmo número de linhas e de colunas. A soma de A e B, indicada por $A + B$ é a matriz obtida pela soma dos elementos correspondentes de A e de B. Note-se que $A + B$ é do mesmo tipo de A e de B. Não se define a soma de matrizes de tipos diferentes ente si.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & -4 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A soma

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 20 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \\ 10 & -21 & 21 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Não é definida pois não há coincidência entre linhas e colunas.

A matriz cujos elementos são todos iguais a zero é chamada *matriz nula* e também é indicada por 0.

Multiplicação por escalar

O produto de uma matriz A por um escalar k, indicado por kA ou Ak é a matriz (de mesmo tipo de A) obtida multiplicando-se cada elemento de A pelo escalar k.

Usam-se também as expressões $-A = (-1)A$ e $A - B = A + (-B)$.

Seja o exemplo

$$3 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Sejam A e B matrizes em que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Então, o produto de $A.B$ é a matriz com o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B e cujo elemento da linha i e da coluna k é obtido multiplicando a linha i de A pela coluna k de B e somando o vetor resultante.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

onde

$$c_{ik} = a_{i1} \times b_{1k} + a_{i2} \times b_{2k} + \dots + a_{ip} \times b_{pk} =$$

$$\sum_{t=1}^{p} a_{it} \times b_{tk}$$

Em $A.B$ se o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B então o produto $A.B$ não está definido.

Seja o exemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 31 \\ 130 & 112 \\ 128 & 110 \end{pmatrix}$$

No caso particular em que um dos fatores de $A.B$ é um vetor, o produto também o é.

Um sistema de equações lineares, como por exemplo:
$8x - 4y + 1z = 19$
$x + y - z = 2$
$11x + 2y - 7z = 5$
pode ser escrito na forma matricial como
$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
e terá como respostas $x = 4$, $y = 5$ e $z = 7$.

Matrizes Quadradas

São as matrizes que tem o mesmo número de linhas e de colunas. Este número n (que é o número de linhas e de colunas) é usado para referir-se à matriz quadrada de ordem n. Supondo uma matriz quadrada de ordem n e nome M, definem-se duas diagonais. A principal contém os elementos $m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn}$. Em outras palavras é a diagonal que começa no canto superior esquerdo e desce até o canto inferior direito.

Já a diagonal secundária é formada pelos elementos $m_{1n}, m_{2,n-1}, \dots, m_{n1}$ ou seja a diagonal que começa no canto superior direito e desce até o canto inferior esquerdo.

Existe uma matriz quadrada muito importante denominada *matriz unidade*. Ela contém o valor unitário ao longo de toda a diagonal principal e todos os demais elementos valem zero. Seu símbolo é a letra I maíscula: I. Ela desempenha na multiplicação matricial o mesmo papel que o número 1 representa na multiplicação convencional (elemento neutro). Daqui, para qualquer matriz quadrada A, tem-se $A.I = I.A = A$.

Recorde-se que nem sempre duas matrizes podem ser somadas ou multiplicadas. Entretanto, se se considerar apenas matrizes quadradas de uma dada ordem n este inconveniente desaparece. Ou seja, dada uma matriz $n \times n$ ela sempre pode ser somada ou multiplicada por outra matriz também $n \times n$ e o resultado sempre será igualmente uma matriz $n \times n$.

Se A é uma matriz quadrada de ordem n pode-se formar potências de A, a saber:

$$A^2 = A.A, \quad A^3 = A^2.A, \quad e\ A^0 = I$$

Daqui, podem-se formar polinômios em A, isto é, para qualquer polinômio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

define-se f(A) como sendo a matriz

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$$

No caso em que f(A) é a matriz nula, diz-se que A é um zero ou raiz do polinômio f(x).

Por exemplo, Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, então $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$.

Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ então $f(A) = 2\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$

Por outro lado, se $g(x) = x^2 + 3x - 10$, então $g(A) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Assim, A é uma raiz do polinômio $g(x)$.

☞ Para você fazer

1. Suponha a matriz A definida por $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ e suponha a matriz B definida por $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Considere ainda $k = 2$ e $m = 6$. Calcule:
a) a soma da terceira coluna de $A + B$
b) o maior valor da segunda linha de kA
c) a soma de todos os elementos de $(kA) + (mB)$

2. Suponha a matriz A definida por $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ e suponha a matriz B definida por $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 9 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
Calcule o produto matricial $A.B$. Daí, calcule:
a) a soma da terceira coluna de $A.B$
b) o maior valor da segunda linha de $A.B$
c) a soma de todos os elementos de $A.B$

3. Suponha a equação matricial definida por $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 40 \end{pmatrix}$
Resolva o sistema de equações e ache os valores de x e y.

4. Suponha a equação matricial definida por $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 8 & -2 & 6 \\ -4 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 64 \\ 22 \end{pmatrix}$
Resolva o sistema de equações e ache o valor de x.

5. Suponha o polinômio matricial definida por $h(x) = x^2 - 9x - 4$ e suponha $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
Informe 1 se A for raiz de $h(x)$ ou informe 0 se não for

1.a	1.b	1.c	2.a	2.b
2.c	3.x	3.y	4.x	5